液体ヘリウムは相転移および metastable state という統計力学の基本課題を提供している。特に渦の振舞は mean field theory を超えて stochastic character を取込んだ理論を要求している（文献8）。この展望のもとに系の状態を coherent state $|\psi(x)\rangle$ で表現したとき，自由エネルギー汎函数 $-\beta^{-1}\ell n\langle\psi|\exp-\beta\mathcal{H}|\psi\rangle$ を min にする ψ_0 は勿論 most probable であるが，一般にはそのまわりの揺動を考慮しなければならない（文献9）。これが二流体性であるが，理論の展開はまだ充分ではない。

参考文献

1) Casher and Revzen : Am. J. Phys. 35 (1967) 1154
2) Revzen : Nuovo Cim. 56B (1968) 129
3) Johnston : Am. J. Phys. 38 (1970) 516
4) Kobe : Preprint IC/71/79 (Miramare-Trieste, Aug. 1971)
5) Glassgold and Sauermann : P.R. 182 (1969) 262
6) Ginibre : Commun. math. Phys. 8 (1968) 26
7) Ginibre and Velo : P.Lett. 26A (1968) 517
8) Martin : Statical mechanics at the Turn of the Decade, Marcel Dekker tnc. 1971, p.175
9) Langer : P.R. 167 (1968) 183
10) Cummings and Johnston : P.R. 151 (1966) 105

4. 相転移と Coherent States Representation

東大物性研　鈴木増雄

§1. Introduction

相転移を一般的に特徴づけるものとして転移点以下での長距離秩序（LRO）の出現をあげることができる。この状態は，その系に固有なボーズ的励起モー

ドの凝縮状態（condensed state） になっている。これは粒子像の立場からの捉え方であって，波動的な見方をすれば，この状態は coherent state であると言ってよい。相転移の機構を議論するのに，必ずしも coherent states repesentation をわざわざ持ち出す必要もないし，それを使うことによってただちに新しい結果が得られるというものでもないが，この表示で議論した方が見通し良く統一的になるという利点を強調したい。この表示の応用できる対象を列挙すると（即ち，量子論的な機構による相転移の例を挙げることになるが），

1. レーザー，メーザー（threshold を相転移点とみることができる。）
2. liquid H_e^4 の superfluid state（代表的なボーズ系）
3. superconductivity（Cooper pair）
4. excitonic phase（photon or phonon）
5. 変位型強誘電性（soft mode）
6. 磁性（マグノン・モード）
7. その他

ここでは，上記中，いくつかの相転移について， coherent state という概念がどう使われるかを例示しながら簡単に解説したい。

§2. 変位型強誘電性（soft mode）

代表的な例として， Ba Ti O_3 をあげることができる。optical phonon の周波数を $\omega(T)$ とすると，温度T が転移点 T_c に上から近づくとき，$\omega(T) \rightarrow$ なる soft mode の存在が知られている。これに対応して， Ti の変位 ξ の期待値は $T < T_c$ で $\langle\xi\rangle \neq 0$ となる。これを第二量子化し， boson operator b, b^+ を用いて，

$$\xi = \Sigma\, u_s (b_s + b_s^+) , \tag{2·1}$$

と書くと，$\langle b_s \rangle \neq 0$（少なくとも特定のモード s に対して）となり，これは即ち，phonon の condensation であり，coherent state である。

§3. Exciton Condensation

昨年秋，北大の年会において中嶋先生の発表された話は coherent states を

議論するのに大変教育的故，ここにその概要を紹介したい。非常に単純化した Frenkel exciton の模型を考える。即ち，原子が photon との相互作用によって二つの準位間を絶えず遷移しているものとし，その状態をスピン演算子を用いて $S_j^z = \pm\frac{1}{2}$ で表わすことにすると，この系の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \hbar\,\omega_0\, b^+ b - (E_0 - 2\mu) \sum_j^N S_j^z - \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_j^N (S_j^+ S^+ + S_j\, b), \tag{3・1}$$

と書ける。但し，$S_j^{\pm} = S_j^x \pm i S_j^y$, E_0 は二つの準位間のエネルギー差，μ は chemical potential である。熱力学的極限（$N\to\infty$）において，分子場理論で解くことにする。

$$\langle S_j^z \rangle = \frac{1}{2}\cos\theta \quad , \quad \langle S_j^+ \rangle = \frac{1}{2}\sin\theta \cdot e^{-i\alpha} \quad \text{etc.}, \tag{3・2}$$

とおいて，Hamiltonian を対角化すると，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{m.f.}} = \hbar\,\omega_0\, B^+ B - \frac{Ng}{4\hbar\,\omega_0} + \frac{N}{2}\left[\frac{1}{2}\eta_c \cos^2\theta - \eta\cos\theta\right], \tag{3・3}$$

となる。基底状態を考え，θ について変分をとると次の結果が得られる：$\eta = E_0 - 2\mu$， $\eta_c = g^2/\hbar\,\omega_0$ として，

(i) $\eta > \eta_c$ のとき， $\cos\theta = 1$ 即ち $\langle S_j^+ \rangle = \langle S_j^- \rangle = 0$ 。

(ii) $\eta < \eta_c$ になると， $\cos\theta = \eta/\eta_c$ 即ち $\langle S_j^+ \rangle = \langle S_j^- \rangle \neq 0$ 。

故に $\langle b^+ \rangle = \langle b \rangle \neq 0$ 。実際，基底状態 $|g\rangle$ は

$$|g\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha\beta^+)\,|\mathrm{vac}\rangle \tag{3・4}$$

という coherent state になる。（但し， $|\alpha|^2 = g^2(\hbar\,\omega_0)^{-2} \cdot N\sin\theta$. ）即ち $\eta = \eta_c$ で相転移が起っている。因みに，（3・1）の型のハミルトニアンはレーザー，メーザーのもっとも簡単な模型としてもよく使われる。[1] その際には，η_c が threshold を与えることになる。

§4. Superconductivity

BCSの基底状態はBoson－likeなCooper pairに対するfield operatorの固有状態であり，

$$|\Phi_0\rangle = C \prod_k \exp(g_k c_k^+ c_{-k}^+)|vac\rangle \qquad (4\cdot1)$$

の型の“coherent state”で表わされる。但し，Cooper pairは，その演算子の交換関係からすぐわかるように本当のボーズ粒子ではないし，凝縮状態にあるCooper pairといえども，互にその運動量によって区別ができ，通常のBose－Einstein凝縮とは異なるものである。従って，(4・1)の状態はこの意味で，近似的なcoherent stateであり，超伝導の相転移を特徴づけるものとしては，むしろ，Off－Diagonal－Long－Range－Order (ODLRO)[2] を用いた方がよい。しかしながら，phaseの定ったcoherent stateという概念を凝縮状態に適用すれば，そのphaseが巨視的に観測されるJosephson effectの超伝導現象における本質的な重要性が，より明瞭になるだろう。ついでながら，coherent stateではreduced density matrixがfactorizeされるから，ODLROが現れることになる。

§5. Liquid H_e^4 の Superfluid State

Coherent statesの超流動への応用については，既に碓井先生の詳しい解説(並びに文献)があるので，ここでは省略したい。ただ，そこに漏れているもので，私の気づいた文献をいくつか列挙したい。

1. M.Schick and P.R.Zilsel ; Phys. Rev. 188 (1969) 522.
“Order Parameter, Mean－Field Theory, and the Ideal Bose Gas”
理想ボーズ気体については，complex symmetry－breaking fieldを入れておいても，すべて厳密に計算でき，特にcoherent statesを用いると計算が簡単になり見通しよくなる。一般に，協力現象を扱う第一近似は分子場理論であるが，理想ボーズ気体に分子場理論をあてはめても，Gross－Pitaevskii方程式は導けないことを論じている。
2. A.Casher, D.Lurie, and M.Revzen ; J.Math. Phys. 9 (1968) 1312。“Functional Integrals for Many－Boson Systems”。

鈴木増雄

相互作用のあるボーズ系に coherent states 表示を応用して，その grand partition function を汎関数積分で表わし，摂動展開の方式を論じている。これは後に D.H.Kobe ("Gross - Pitaevskii Equation for a Strongly Interacting Superfluid Boson System; preprint) によって更に拡張されている。

3. A.C.Biswas ; Phys. Letters 30A (1969) 296。"On Flow of Super-Fluid Helium in Terms of Action-Angle Variables in Ouantum Statistics"

系の粒子数Nと位相 ϕ は厳密には互に共役な量ではなく，$\triangle N \triangle \phi \geq \frac{1}{2}$ という不確定性関係は一般には正しくないという Nieto や Carruthers (Rev. Mod. Phys. 40 (1968) 411 を見よ) の話を coherent states 表示の action-angle variable を用いて論じている。

4. G.J.Ruggeri ; Physica 56 (1971) 121 。"On the Dynamics of Bose Systems in Action-Angle Variables"。

粒子数Nと位相 ϕ の関係を3の論文と同じく coherent states 表示を用いて論じているのであるが，今度は，位相そのものではなく，その周期性を考慮して，cos ϕ ， sin ϕ とNとの関数を議論している。

§6. 磁性への応用

転移点以下の秩序状態は magnon の condensed state 即ち coherent state とみることが出来る。こういう見方・とり扱い方をすることによってまだ新しい結果が得られているわけではないので，以下に文献の題名を列挙しておくにとどめる。

1. J.M.Radcliffe; J.Phys. A: Gen. Phys. 4 (1971) 313. "Some Properties of Coherent Spin States."
2. N.Zagury and S.M. Rezende; Phys. Rev. B4 (1971) 201. "Theory of Macroscopic Excitations of Magnons."
3. K.H.Douglass ; Ann. of Phys. 62 (1971) 383 ; ibid 64 (1971) 396. "Applications of the Coherent State Representation in the Theory of Magnetism: I. The Heisenberg Model, II. Helical

Spin Configurations".

参 考 文 献

1. W.Louisell; Radiation and Noise in Quantum Electronic (McGraw-Hill, Book Co. Inc., New York, 1964)
2. C.N.Yang; Rev. Mod. Phys. 34 (1962) 694.

5。 Optical Coherence の二，三の問題

早大理工　　長 島 知 正

1. Coherent state について

R.Glauber が，いわゆる Coherent state なる状態を輻射場が干渉性を持つ理想的な状態として導入したのは， field の correlation function が factorize される様に選んだものであり，その様な状態として，結局，field operator を

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t)$$
$$= \sum_k a_k\, u_k(\mathbf{x})\, e^{-i\omega_k t} + \sum a_k^{+}\, u_k^{*}(\mathbf{x})\, e^{i\omega_k t}$$

と分解した時， $a_k|\alpha_k> = \alpha_k|\alpha_k>$ であれば，つまり， annihilation operator の固有状態であれば，先の field correlation function を factorize することを示した。この様に Glauber は，この状態を operational な方法で導出した。そこで，この状態の物理的な内容を探ぐるのは意味があると思われる。今， field の一つのモードに注目して，この coherent state に見い出す photon の分布を考えると

$$P_n(\alpha) = |<\alpha|n>|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp(-|\alpha|^2)$$